Lycée : Metouia	Le : 08 /12 / 2009	Profs : Mr. SAADA.M
Devoir de synthèse n°1 Mathématiques		Classe : $4^{ième}$ Math
		Durée : 3 Heures

Exercice n°1 : (3 Points)

I) Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur votre copie sans justification le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{V})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1et i.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un réel est :

a) la droite (AB) privée de A ; **b)** le segment $[AB]$privé de A ; **c)** le cercle de diamètre $[AB]$privé de A

2) Soit Δ et D deux droites perpendiculaires en un point I. l'application $S_\Delta \circ S_D \circ S_\Delta$ est :

a) S_Δ ; **b)** S_D ; **c)** Symétrie glissante

II) Répondre par vrai ou faux sans justification :

1) Si (u_n) est une suite croissante non majorée, alors $(\dfrac{1}{u_n})$ est une suite convergente.

2) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice n°2 : (4 points)

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par $A' = S_D(A)$, $D' = S_C(D)$ et $I = A'*C$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A' en A et D en B .

b) Caractériser f .

2) Soit $\varphi = t_{\overrightarrow{AD}} \circ f$

a) Déterminer $\varphi(A')$ et $\varphi(D)$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de φ .

c) Montrer que $\varphi(A) = D'$. En déduire la nature du triangle IAD'.

3) Soit $g = s_{(BD)} \circ \varphi$

a) Déterminer $g(A')$ et $g(D)$.

b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice n °3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}}$ et ζ_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

c) Explicité $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans IR_+ et que $\alpha \in]1,2[$.

2) Tracer les courbes ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ des fonctions f et f^{-1} dans le même repère. (Préciser la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0).

3) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, on a : $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

4) Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $u_0 = 1 \quad et \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in IN$

a) Montrer que : $\forall n \in IN \quad , \quad 1 \le u_n \le 2$

b) Montrer que $\forall x \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$

c) Montrer que $\forall x \in IN$, $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on précisera.

Exercice n°4 : (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\cos 2x$

1) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

2) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$, et que $(g^{-1})'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

3) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $H(x)=g^{-1}(\cos x)+g^{-1}(\sin x)$

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

b) calculer $H(0)$ .Montrer que H est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ que l'on calculera.

Exercice n°5 : (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN, par : $\begin{cases} u_0=0 \quad , \quad u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3} \\ v_0=1 \quad , \quad v_{n+1}=\dfrac{3u_n+2v_n}{5} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite.

3) Soit la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n=9u_n+5v_n$

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).